**4 вариант**

**Задание 1.**

Найти приближенное значение первой и второй производной функции при заданном значении аргумента ξ = 1,4 с помощью соответствующего интерполяционного полинома Ньютона, если функция задана в равностоящих узлах

yi = f(xi); xi = x0 +i⋅h; h = const; i = 0…6;

y’ξ = f’(ξ); y’ξ - ? 6; y”ξ = f”(ξ); y”ξ - ? .

Оценить погрешность полученного значения.

Провести проверку вычислений в среде MS Excel, MathCad и т.п. Сделать вывод о точности решения.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *i* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| *x* | 1 | 1,15 | 1,3 | 1,45 | 1,6 | 1,75 | 1,9 |
| *y* | 0,3679 | 0,3064 | 0,2399 | 0,1771 | 0,1237 | 0,0819 | 0,0514 |

**Решение.** Используя конечные разности шестого порядка найдем приближенные значения первой и второй производных этой функции в точке ξ = *x* = 1,4, с помощью соответствующего интерполяционного полинома Ньютона. Обратим внимание на тот факт, что при подстановке табличного значения аргумента *xi* мы должны получить соответствующее табличное значение *y*i. Последнее утверждение является следствием того, что используем интерполяционные многочлены (которые должны проходить через заданные в таблице узловые точки). Именно это утверждение и является критерием проверки правильности наших вычислений.

По семи узлам (i = 0...6) табличной функции рассчитываем таблицу разностей.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *i* | *x*i | *y*i | Δ*y*0 | Δ2 *y*0 | Δ3 *y*0 | Δ4 *y*0 | Δ5 *y*0 | Δ6 *y*0 |
| 0 | 1 | 0,3679 | -0,0615 | -0,005 | 0,0087 | -0,003 | -0,0005 | 0,0015 |
| 1 | 1,15 | 0,3064 | -0,0665 | 0,0037 | 0,0057 | -0,0035 | 0,001 |  |
| 2 | 1,3 | 0,2399 | -0,0628 | 0,0094 | 0,0022 | -0,0025 |  |  |
| 3 | 1,45 | 0,1771 | -0,0534 | 0,0116 | -0,0003 |  |  |  |
| 4 | 1,6 | 0,1237 | -0,0418 | 0,0113 |  |  |  |  |
| 5 | 1,75 | 0,0819 | -0,0305 |  |  |  |  |  |
| 6 | 1,9 | 0,0514 |  |  |  |  |  |  |

Определяем с помощью полученной таблицы 1 интерполяционный полином Ньютона и соответствующие формулы для численного дифференцирования первой и второй производной.

)

)(

)(

(

)

)(

)(

(

!

6

...

)

(

)

(

5

4

3

2

1

0

6

0

6

0

0

0

*x*

*x*

*x*

*x*

*x*

*x*

*x*

*x*

*x*

*x*

*x*

*x*

*h*

*y*

*x*

*x*

*h*

*y*

*y*

*P*

*x*

*f*

*В*







































































*y*

*q*

*q*

*q*

*q*

*q*

*y*

*q*

*q*

*y*

*q*

*y*

*x*

*y*

5

0

2

0

0

!

5

)

4

)(

3

)(

2

)(

1

(

...

!

2

)

1

(

)

(

0

где и



Производя перемножение биномов, получим:



Так как



находим первую производную 













































0

4

1

2

3

0

3

1

2

0

2

0

24

6

22

18

4

6

2

6

3

.

2

1

2

1

)

(

*y*

*q*

*q*

*q*

*y*

*q*

*q*

*y*

*q*

*y*

*h*

*x*

*y*



Аналогично, находим вторую производную

*dq*

*y*

*d*

*h*

*dx*

*dq*

*dq*

*y*

*d*

*x*

*y*

)

(

1

)

(

)

(

2

















+…



Если и , тогда



,



.



Если  и , тогда



Приведенные формулы позволяют вычислить приближенное значение первой и второй производной функции при заданном значении аргумента ξ = 1,4 и для табличных значений  с помощью соответствующего интерполяционного полинома Ньютона, когда функция задана таблично в равностоящих узлах.

Приближенное значение первой и второй производной функции при заданном значении аргумента ξ = 1,4 вычислены в среде MS Excel:

|  |  |
| --- | --- |
| *y*'(ξ)= | -0,41165 |
| *y*''(ξ)= | 0,36460 |

Проведем проверку вычислений в среде MS Excel, для чего вычислим значения функции  во всех табличных значениях  и сверим эти значения с табличными:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *x* | *y* |  |
| 1 | 0,3679 | 0,36790 |
| 1,15 | 0,3064 | 0,30640 |
| 1,3 | 0,2399 | 0,23990 |
| 1,45 | 0,1771 | 0,17710 |
| 1,6 | 0,1237 | 0,12370 |
| 1,75 | 0,0819 | 0,08190 |
| 1,9 | 0,0514 | 0,05140 |

Оценим погрешность интерполирования полиномом . Как мы уже заметили, для табличных значений аргумента погрешность равна нулю, поэтому речь идет об оценке  при значениях . Пусть функция , значения которой занесены в таблицу, имеет непрерывную  производную на отрезке .

Тогда погрешность определяется формулой:

, где , - точка из .

Так как точка  - неизвестна, то эта формула позволяет только оценить погрешность , где .

Найти приближенное значение первой и второй производной функции при заданном значении аргумента ξ = 1,4 с помощью соответствующего интерполяционного полинома Лагранжа, если функция задана в равностоящих узлах

yi = f(xi); xi = x0 +i⋅h; h = const; i = 0…6;

y’ξ = f’(ξ); y’ξ - ? 6; y”ξ = f”(ξ); y”ξ - ? .

Оценить погрешность полученного значения.

Провести проверку вычислений в среде MathCad. Сделать вывод о точности решения.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *i* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| *x* | 1 | 1,15 | 1,3 | 1,45 | 1,6 | 1,75 | 1,9 |
| *y* | 0,3679 | 0,3064 | 0,2399 | 0,1771 | 0,1237 | 0,0819 | 0,0514 |

**Решение.**

Интерполяционный полином Лагранжа , для семи табличных точек – узлов интерполяции, ищется в виде:

, где

,

,

,

– – –

.

Каждый такой множитель  выдает значение  и выдает значение  при , где .

Подставив табличные значения узлов интерполяции, и проведя сведение коэффициентов уравнения, приведем его к виду:

.

MathCad – листинг с проведенными расчетами:















На графике видим, что полученная функция проходит через узловые точки из таблицы. Это означает, что функция интерполирования задана верно.

Мы получили интерполяционный полином Лагранжа:

.

Продифференцировав его и подставив в полученные производные функции аргумент ξ = 1,4, найдем значения производной и второй производной в требуемой точке:



|  |  |
| --- | --- |
| *y*'(*x*)= | -0,4116 |
| *y*''(*x*)= | 0,3646 |

Как видим, полученные значения производных интерполяционных многочленов в заданной точке совпадают по всем знакам точности кроме последнего, с которой заданы табличные значения функции:

Полином Ньютона

|  |  |
| --- | --- |
| *y*'(ξ)= | -0,41165 |
| *y*''(ξ)= | 0,36460 |

Полином Лагранжа

|  |  |
| --- | --- |
| *y*'(*x*)= | -0,4116 |
| *y*''(*x*)= | 0,3646 |

**Задание 2.** Численное интегрирование

1. Найти приближенное значение интеграла а) по формулам прямоугольников, трапеции с точностью, =10-3.
2. Найти приближенное значение интеграла б) по формулам Симпсона с точностью, =10-3.
3. Сравнить полученные результаты.

Интегралы для вычисления (N=4):

1. 

б) 

*Теория.* Приближенное интегрирование – общие замечания.

В тех случаях, когда точное интегрирование невозможно (интеграл не может быть выражен в известных функциях), применяются аналитические методы приближенного интегрирования, заключающиеся в том, что подынтегральная функция заменяется другой, интеграл от которой вычисляется более или менее легко. В качестве такой функции часто берут интерполяционный многочлен.

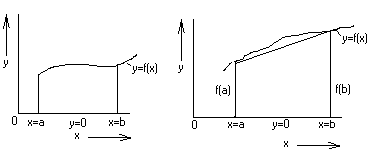
Приближенное интегрирование применяется также в тех случаях, когда интегрируемая функция задана таблицей или графиком или если она быстрее, чем интерполяционный многочлен, приводит к цели (с заданной точностью).

Пусть требуется на отрезкевычислить определенный интеграл Если известна первообразная  от функции , то интеграл может быть вычислен по формуле Ньютона-Лейбница:

 (1)

Для многих практических задач не удается выразить первообразную через элементарные функции. Поэтому для получения расчетных формул заменяют на отрезке интегрируемую функцию другой функцией , достаточно близкой к функции , первообразная и интеграл от которой вычисляются просто. Такая задача обычно решается с помощью интерполирования подынтегральной функции алгебраическими многочленами.

**Метод прямоугольников.** Задача численного интегрирования функции заключается в вычислении значения определенного интеграла по ряду значений подынтегральной функции. Численное вычисление однократного интеграла называется механической квадратурой, а соответствующие формулы – квадратурными. Простейшие квадратурные формулы можно получить из наглядных соображений.



а. б.

Рис. 1. Иллюстрация простейших формул вычисления определенных интегралов: а. прямоугольников, б. трапеций

Пусть вычисляется интеграл Если на рассматриваемом отрезке (рис.1а), то можно положить  где - произвольная точка отрезка , так как определенный интеграл геометрически представляет собой площадь фигуры, ограниченной линиями:Обычно в качестве  берут среднюю точку отрезка. В итоге получается формула прямоугольников

 (2)

Более точная формула получится, если отрезок интегрирования  разбить на  равных частей (рис.2). Тогда формула прямоугольников в среднем имеет вид:

 (3)

где  - абсциссы точек разбиения отрезка  на  равных частей так, что 

**Оценка погрешности вычислений** по формуле (3) равна

 (4)

где  на отрезке .

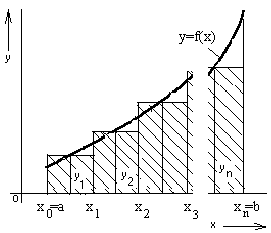


Рис.2. Иллюстрация метода прямоугольников

С геометрической точки зрения замена интеграла квадратурной формулой (3) означает замену дуги кривой  на каждом элементарном отрезке  отрезком прямой , параллельной оси  и отстоящей от нее на расстоянии . При этом (в случае, когда ) каждый элементарный отрезок криволинейной трапеции заменяется прямоугольником (отсюда название метода).

**Метод трапеций.** Предположимтеперь, что функция близка к линейной (рис.5.1б), тогда интеграл можно заменить площадью трапеции с высотой и основаниями и В итоге получаем формулу трапеций в простейшем виде:

**** (5)

Если отрезок интегрирования разбить на равных частей (рис.3), то получим более точную формулу трапеций:

 (6)

где  - абсциссы точек разбиения отрезка  на  равных частей так, что

**Оценка погрешности вычислений** по формуле (6) равна

 (7)

где  на отрезке .

С геометрической точки зрения замена интеграла квадратурной формулой (6) означает замену дуги кривой  на каждом элементарном отрезке  отрезком прямой, проходящей через точки  и . В результате кривая  на отрезке  заменяется совокупностью трапеций (отсюда название метода).

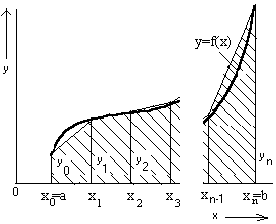


Рис. 3. Иллюстрация метода трапеций

**Метод Симпсона.** В методе Симпсона (парабол) отрезок интегрирования  разбивается на четное число равных частей. Через точки деления проводят ординаты (рис.4), которые разбивают криволинейную трапецию на ряд полос. Точки пересечения ординат с кривой обозначим через  Заменим кривую  алгебраическими многочленами второй степени (параболами) , проходящими через каждые три соседние точки кривой (квадратичная сплайн-интерполяция). Тогда площадь криволинейной трапеции с основанием заменится площадью трапеции, ограниченной сверху параболой. Например, на первом отрезке длиной параболой, проходящей через точки Пусть для простоты т.е.  совпадает с началом координат.

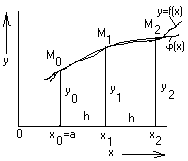


Рис.4. Схема метода парабол

Определим коэффициенты параболы  из условия, что она проходит через точки Получим систему уравнений:

 (8)

Так как кривую заменили параболой, то площадь элементарной криволинейной трапеции будет равна определенному интегралу



Второе уравнение системы (8) умножим на 4 и сложим все уравнения системы. В итоге, учитывая (интерполяция), получим:



Тогда

 (9)

Распространим формулу (9) на вычисление площадей остальных элементарных криволинейных трапеций, т.е.





………………………………



Складывая полученные интегралы, будем иметь:



или формулу Симпсона (парабол):

 (10)

где  - абсциссы точек разбиения отрезка  на 2 равных частей так, что  

В случае, когда в условии задания задано значение , а не , тогда значение последней переменной будем искать по формуле 

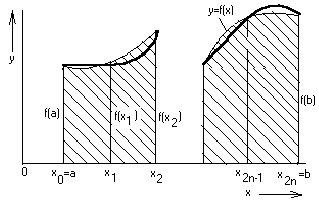


Рис.5. Иллюстрация метода Симпсона

**Оценка погрешности вычислений** по формуле (10) равна

 (11)

где  на отрезке .

С геометрической точки зрения замена интеграла квадратурной формулой (5.10) означает замену дуги кривой  на каждом элементарном отрезке  параболой, проходящей через точки ,  и (см. рис. 5). Отсюда происходит название метода.

**Оценка погрешности.** При приближенном интегрировании функций необходимо знать погрешность, с которой получено приближенное значение интеграла, так как без нее полученный результат не представляет абсолютной ценности. На практике для оценки погрешности (правило Рунге) поступают следующим образом:

1. Выбирают число  (в случае формулы Симпсона - четное), например, 
2. Вычисляют приближенное значение интеграла по одной из квадратурных формул с шагом  (обозначим это приближенное значение ).
3. Затем вычисляют приближенное значение интеграла по этой же квадратурной формуле с шагом  (обозначим его ).
4. Тогда за приближенное значение интеграла , вычисленного по квадратурной формуле, принимают:

* для формул прямоугольников и трапеций



* для формулы Симпсона



При этом погрешность этих вычислений оценивается величиной:

* для формул прямоугольников и трапеций

;

* для формулы Симпсона



Расчетные формулы.

Метод левых прямоугольников:

Метод правых прямоугольников:

Метод средних прямоугольников:

Метод трапеций.

Метод Симпсона.

**Решение задания 2**

1. Найдем приближенное значение интеграла  по формулам прямоугольников, трапеции с точностью, =10-3.

Для начала определим количество шагов разбиения и шаг разбиения интервала интегрирования.

, ; .

Согласно формулы погрешности приближенного вычисления определенного интеграла по методу прямоугольников , где  на отрезке .



; 

.

При решении данного неравенства получаем, что .

Таким образом, для достижения необходимой точности методом прямоугольников для данного интеграла достаточно положить количество точек разбиения . Мы возьмем: .

Определим теперь шаг разбиения:



Зададим значения абсциссы точек разбиения отрезка  на  равных частей 

 и определяем значения подынтегральной функции для каждого  :

.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|  | 0,400 | 0,6 | 0,8 | 1 | 1,2 |
|  | 0,36358 | 0,33619 | 0,30445 | 0,26969 | 0,23319 |

Все найденные значения подставляем в формулу левых прямоугольников:

=0,2(0,36358+0,33619+0,30445+0,26969)=

=0,24748.

Все найденные значения подставляем в формулу правых прямоугольников:

=0,2(0,33619+0,30445+0,26969+0,23319)=0,2214.

Вычислим интеграл методом трапеций. Поскольку формула для вычисления погрешности отличается, то найдем какое  нам подходит:

; 

.

При решении данного неравенства получаем, что .

Таким образом, для достижения необходимой точности методом трапеций для данного интеграла достаточно положить количество точек разбиения . Мы возьмем: .

Узловые значения будут те же, что и для метода прямоугольников:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|  | 0,400 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1 | 1,1 | 1,2 |
|  | 0,364 | 0,351 | 0,336 | 0,321 | 0,304 | 0,287 | 0,27 | 0,252 | 0,233 |

Все найденные значения подставляем в формулу трапеций

0,241890,242.

Вычислим интеграл б)  методом Симпсона (парабол):

Для начала определим количество шагов разбиения и шаг разбиения интервала интегрирования.

, ; .

Согласно формулы погрешности приближенного вычисления определенного интеграла по методу Симпсона , где  на отрезке .



; 

.

При решении данного неравенства получаем, что .

Таким образом, для достижения необходимой точности методом Симпсона для данного интеграла достаточно положить любое количество точек разбиения. Мы возьмем: .

Определим теперь шаг разбиения:



Зададим значения абсциссы точек разбиения отрезка  на  равных частей ,

 и определяем значения подынтегральной функции для каждого  :

.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|  | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1 | 1,2 |
|  | 0,49029 | 0,47891 | 0,46424 | 0,44721 | 0,42875 |

Все найденные значения подставляем в формулу Симпсона:

(0,49029+4\*(0,47891+0,44721)+2\*0,46424+0,42875)=

=0,3.